

5.6.11 Stehende Wellen mit Gummischnur

1 Motivation

Dieser Versuch führt stehende Wellen einer beidseitig eingespannten Gummischnur vor.

2 Experiment

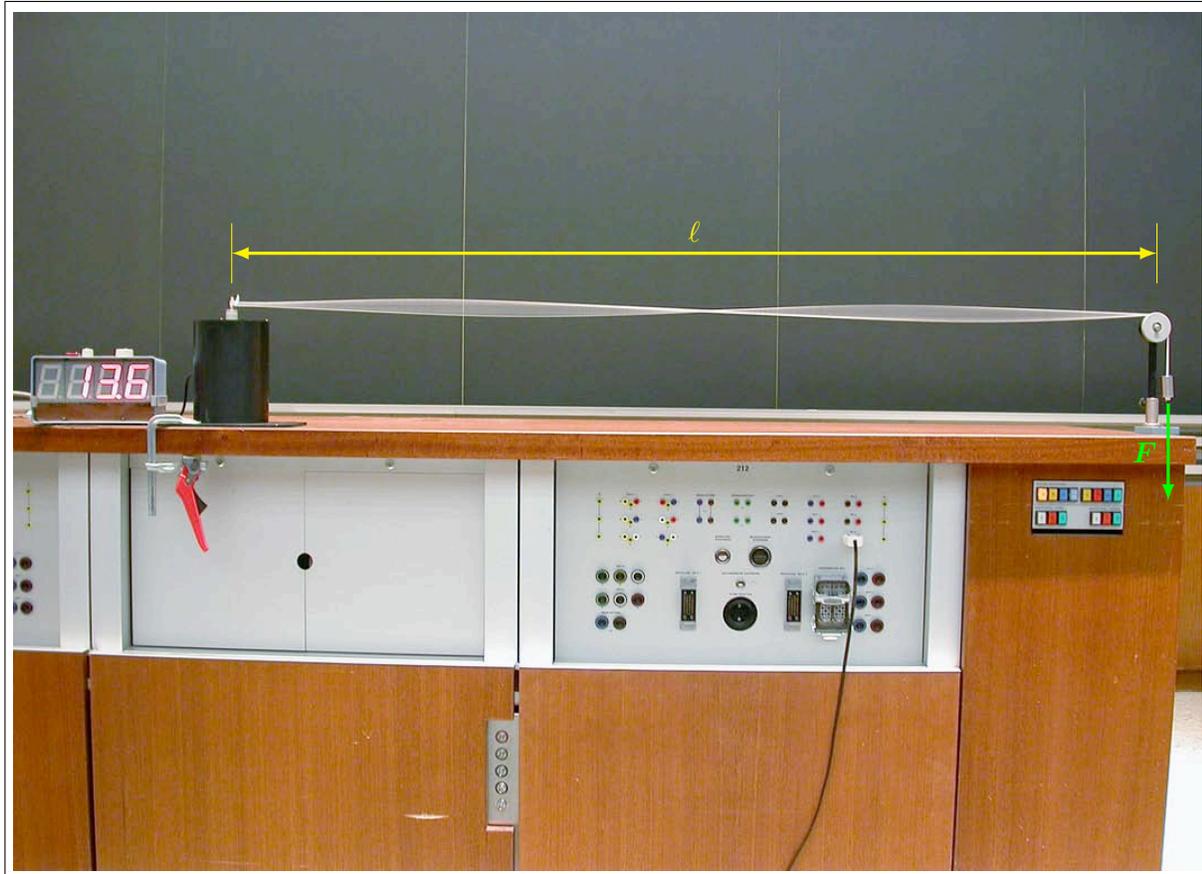


Abbildung 1: Versuchsanordnung „Stehende Wellen mit Gummischnur“

Eine Gummischnur der Länge ℓ ist an einem Ende eingespannt und wird am anderen Ende über eine Laufrolle mit der Gewichtskraft $F = mg$ belastet (siehe Abb. 1). Damit ist die Schnur beidseitig fest eingespannt. Beim Auslenken der Schnur entstehen stehende Wellen in x -Richtung. Die Wellenfunktion lautet:

$$\psi(x, t) = A(z) \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

Die Randbedingungen

$$\psi(0, t) \equiv 0 \quad \text{und} \quad \psi(\ell, t) \equiv 0 \quad (2)$$

verlangen diskrete Werte für die Wellenzahl

$$k = \frac{\omega}{v_0}, \quad (3)$$

wobei ω die Kreisfrequenz und v_0 die Phasengeschwindigkeit der Welle bedeuten.

Es gilt

$$v_0 = \sqrt{\frac{S}{\rho}} \quad (4)$$

mit der Zugspannung $S = F/A$, der Zugkraft F , sowie der Dichte ρ und der Querschnittsfläche A der Schnur.

Aus den Randbedingungen Gl. (2) folgt:

$$k_n = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Damit weist auch die Kreisfrequenz feste Werte auf:

$$\omega_n = \frac{v_0 \pi n}{\ell} = \frac{\pi n}{\ell} \sqrt{\frac{S}{\rho}} \quad (6)$$

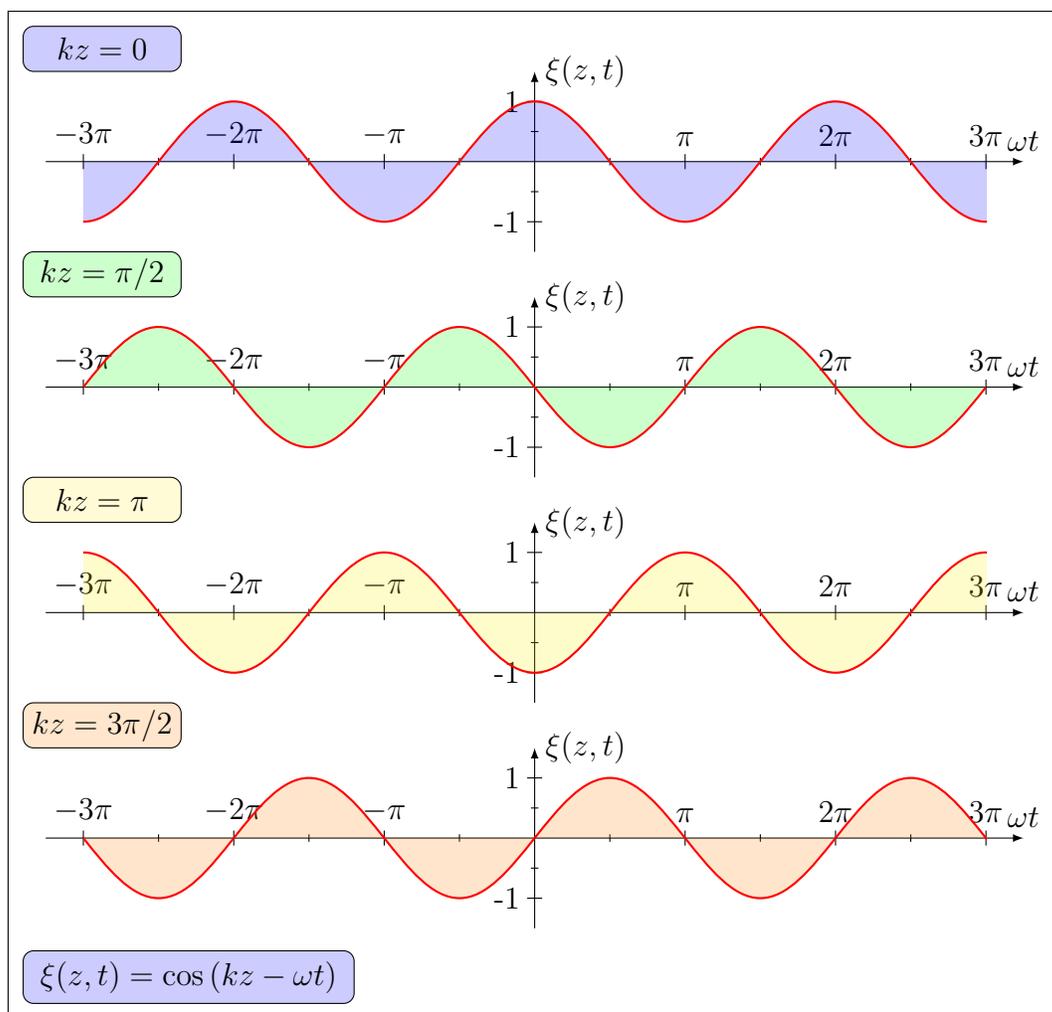


Abbildung 2: Zeitabhängigkeit der transversalen Welle für 4 verschiedene Orte im abgestuften Abstand von jeweils $\Delta z = \lambda/4$.

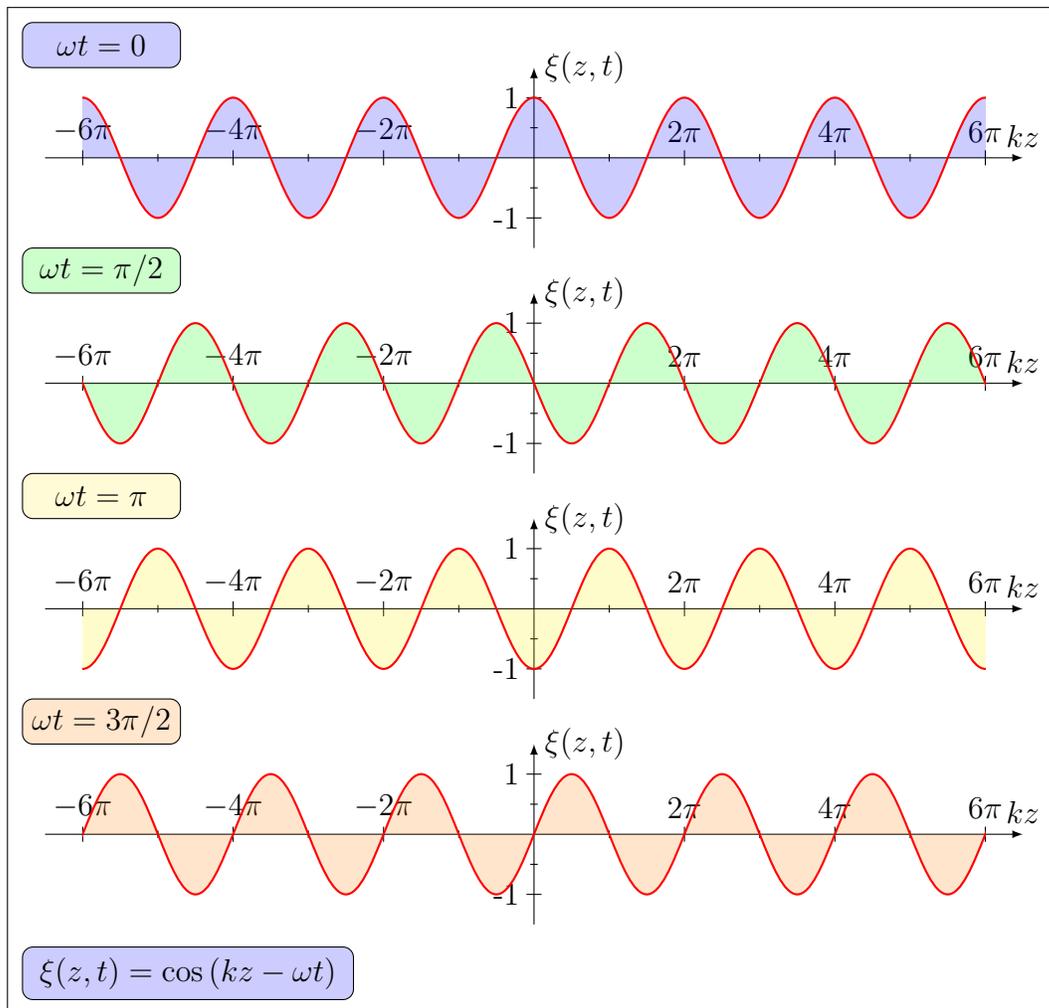


Abbildung 3: Ortsabhängigkeit der transversalen Welle für 4 verschiedene Zeitpunkte im abgestuften Abstand von jeweils $\Delta t = T/4$.

3 Theorie

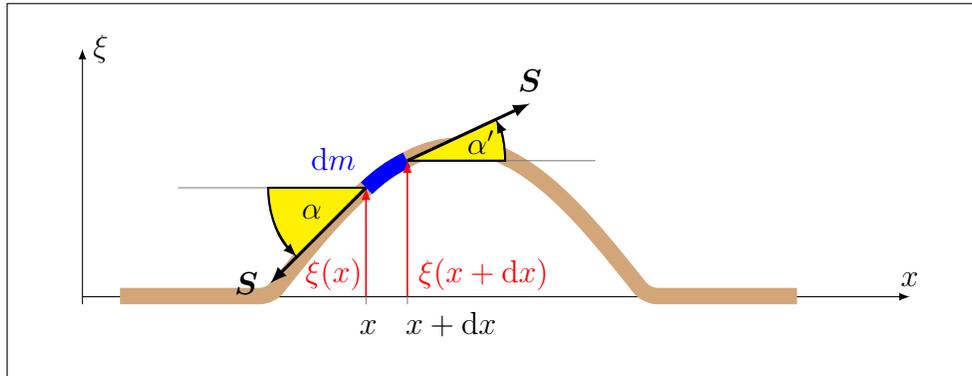
3.1 Transversale elastische Seilwellen

Der Zusammenhang zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen und den physikalischen Eigenschaften des Seils kann mit Hilfe der Newtonschen Gesetze hergeleitet werden.

Wir unterteilen das Seil in differentielle Massenelemente dm . In diesem Fall kann das Seil als ein Masse-Feder-System betrachtet werden, wobei die diskrete Reihe von Massen durch eine kontinuierliche Verteilung von Massenelementen ersetzt wird.

Wir nehmen an, dass die Massenelemente sich nur in der vertikalen Richtung um ihre Ruhelage bewegen können.

Wir betrachten nun ein einzelnes Massenelement dm der Länge dx , dessen Anfangspunkt sich im Punkt x des Seils befindet und dessen Endpunkt sich im Punkt $x + dx$ befindet. Die Auslenkung ist durch die Funktion $\xi(x)$ bestimmt. Siehe Abb. 4.

Abbildung 4: Auf das Massenelement dm eines Seiles wirkende Kräfte

Die auf das Seil mit Querschnittsfläche A wirkende Kraft \mathbf{F} erzeugt eine **Zugspannung** $\mathbf{S} = \mathbf{F}/A$. Die auf das Massenelement wirkende resultierende vertikale Komponente der Zugspannung ist

$$\Delta S_y = S \sin \alpha' - S \sin \alpha, \quad (7)$$

α und α' sind die Winkel an beiden Enden des Massenelements zur Horizontalen (Die Auswirkung Gravitationskraft wird als vernachlässigbar gegenüber der Zugspannung vorausgesetzt.).

Für kleine Auslenkungen gilt die genäherte Gleichung

$$\tan \alpha \approx \sin \alpha$$

Es folgt:

$$\Delta S_y \approx S \tan \alpha' - S \tan \alpha, \quad (8)$$

Die Steigung des Seils im Punkt x ist gleich der Ableitung der Auslenkung ξ nach x .

Da die Funktion ξ von zwei Variablen abhängt, müssen wir die partielle räumliche Ableitung verwenden:

$$\tan \alpha = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \tan \alpha' = \frac{\partial \xi(x + dx, t)}{\partial x} \quad (9)$$

D.h., die resultierende vertikale Zugspannung kann als Funktion der Ableitung der Auslenkungsfunktion geschrieben werden

$$\begin{aligned} \Delta S_y &= S \tan \alpha' - S \tan \alpha \\ &= S \left\{ \frac{\partial \xi(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

Im Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ erhalten wir schliesslich

$$dS_y = S \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (10)$$

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der differentiellen Segmente können mit Hilfe der zeitlichen partiellen Ableitungen gewonnen werden:

$$v_y(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{und} \quad a_y(x, t) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (11)$$

Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz folgt

$$dS_y \cdot A = dm \cdot a_y \quad \Rightarrow \quad S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \underbrace{dx A}_{=dV} = dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (12)$$

Nach Division mit dV folgt

$$S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (13)$$

und nach weiterer Division durch S

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{S} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}} \quad (14)$$

Diese Gleichung ist die **Differentialgleichung** der **Wellenausbreitung**.

Wir verwenden das Ergebnis

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = 0} \quad (15)$$

Die **Ausbreitungsgeschwindigkeit der Seilwellen** ergibt sich damit zu

$$\boxed{v^2 = \frac{S}{\rho} \quad \Rightarrow \quad v = \pm \sqrt{\frac{S}{\rho}},} \quad (16)$$

wobei S die **Zugspannung** des Seils oder der Saite, und ρ seine **Dichte** ist. Wir bemerken, dass die Einheiten der Gleichung gegeben sind durch

$$\sqrt{\frac{(\text{N/m}^2)}{(\text{kg/m}^3)}} = \sqrt{\frac{\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)}{(\text{kg/m}^3)}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (17)$$

d.h., die Einheit entspricht wirklich einer Geschwindigkeit.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt nur von den Eigenschaften des Seils ab:

- a) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit nimmt mit der Zugkraft zu. Je grösser die Zugkraft ist, desto schneller kehren die Massenelemente in ihre Gleichgewichtslage zurück.
- b) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit nimmt mit der Dichte ab. Je grösser diese Dichte ist, desto langsamer kehren die Massenelemente in ihre Gleichgewichtslage zurück.

3.2 Stehende Wellen

Wir untersuchen nun die Interferenz zweier entgegengerichteter kohärenter Wellen. Die entgegengerichtete Welle kann man beispielsweise durch Reflexion an einem Spiegel erzeugen.

$$\xi_1(t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (18)$$

$$\xi_2(t) = A \cos(-kx - \omega t + \delta_R) \quad (19)$$

Die Superposition $\xi := \xi_1 + \xi_2$ dieser beiden Wellen ergibt

$$\xi = 2A \cos\left(kx - \frac{\delta_R}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\delta_R}{2}\right) \quad (20)$$

Dies ist kein laufende Welle mehr, da sie nicht vom Typ $f(x - vt)$ ist!

Die mittlere Intensität beträgt

$$\langle I \rangle \sim \frac{1}{2}(2A)^2 \cos^2\left(kx - \frac{\delta_R}{2}\right) \quad (21)$$

Für $\delta_R = 0$ (Reflexion am weichen Medium, kein Phasensprung) gibt es Maxima der Intensität bei

$$kx = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

und Minima bei

$$kx = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

mit der bei der Reflexion entstehenden Phase δ_R . Diese Welle ist, wie bereits erwähnt, keine laufende Welle mehr. Man bezeichnet sie vielmehr als **stehende Welle**. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass **Knoten** und **Bäuche** auftreten. Knoten entsprechen den Nullstellen der ortsabhängigen Funktion, so dass dort die Auslenkung stets null ist. Bäuche entsprechen dagegen den Extrema, also sowohl den Maxima als auch den Minima der ortsabhängigen Funktion. Die stehende Welle schwingt dort ortsfest mit der maximal möglichen Auslenkung. Wir unterscheiden nun nach der Art der Reflexion:

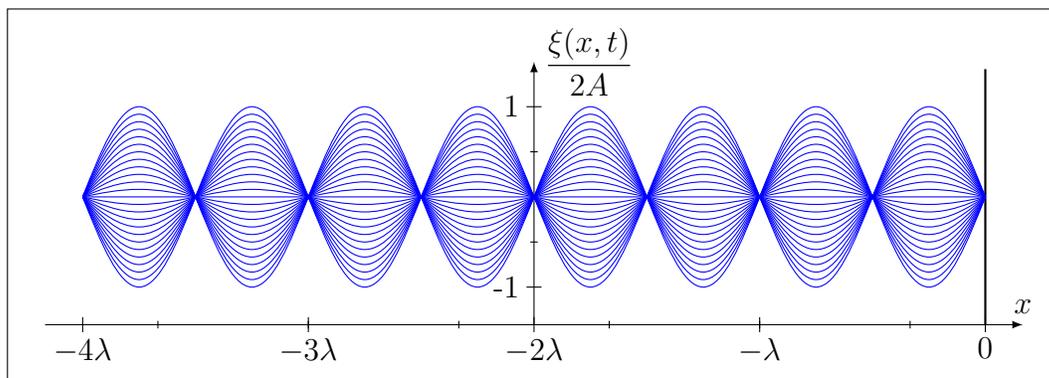


Abbildung 5: Stehende Welle bei Reflexion am harten Medium

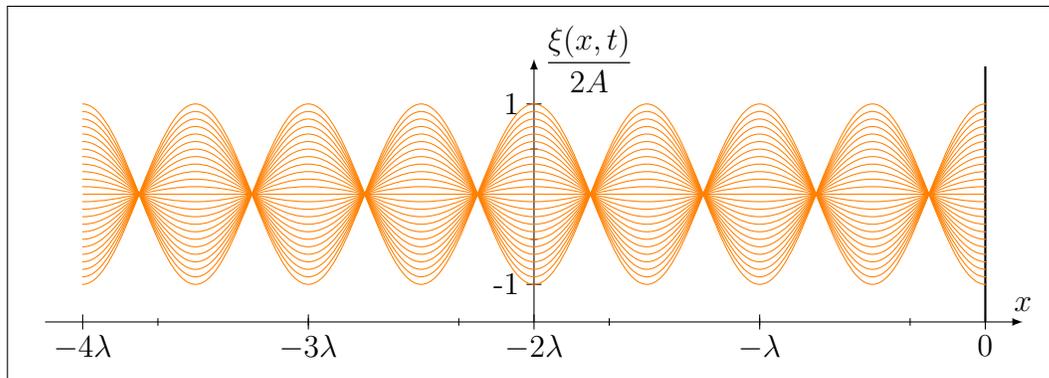


Abbildung 6: Stehende Welle bei Reflexion am weichen Medium

a) Reflexion am harten Medium ($\delta_R = \pi$)

Die Amplitude ist in diesem Fall

$$\xi = 2A \sin kx \sin \omega t \quad (24)$$

und garantiert einen Knoten an der Grenzfläche ($x = 0$) (siehe Abb. 5).

b) Reflexion am weichen Medium ($\delta_R = 0$)

Hier ist die Amplitude gleich

$$\xi = 2A \cos kx \cos \omega t \quad (25)$$

und ergibt einen Bauch für $x = 0$ (siehe Abb. 6).

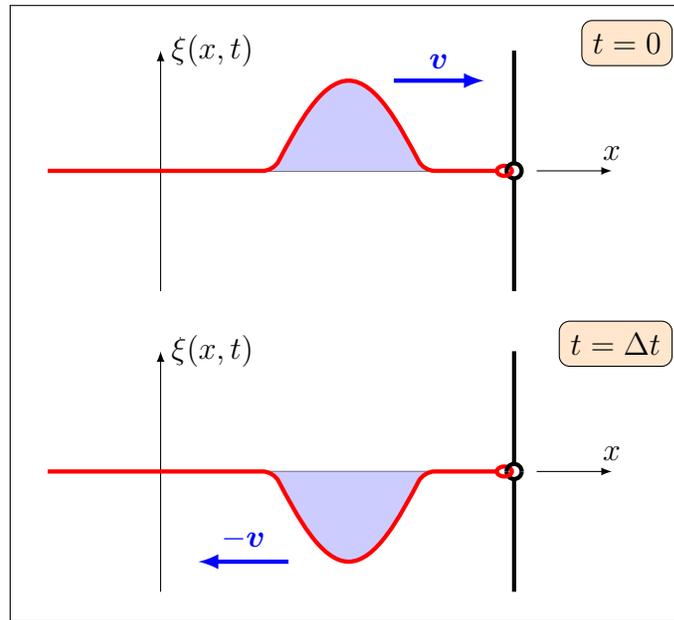


Abbildung 7: Reflexion eines Wellenbergs am festen Ende.

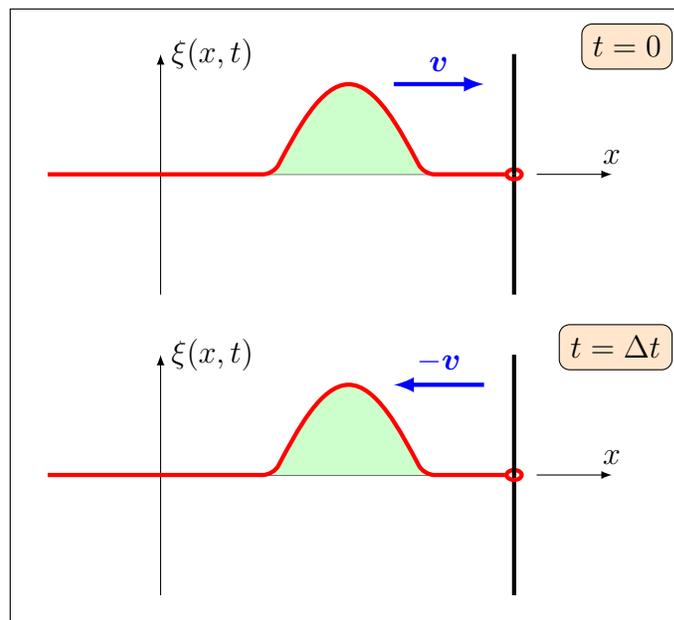


Abbildung 8: Reflexion eines Wellenbergs am losen Ende.

Das Verhalten einer Welle bei der Reflexion wird durch Abbn. 7 und 8 veranschaulicht, die die Reflexion einer Seilwelle am harten bzw. am weichen Medium zeigen.